

Dinámica No Lineal

Práctica 1

Revisión de la Mecánica Hamiltoniana

El oscilador armónico

1. (a) Hallar el Hamiltoniano de un oscilador armónico de frecuencia ω y masa m :

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

donde q es la coordenada y p su momento generalizado.

- (b) Escribir las ecuaciones de Hamilton correspondientes.
 - (c) Representar esquemáticamente el espacio de fases del sistema.
2. Resolver el problema del oscilador armónico con una transformación canónica.
 - (a) Encontrar la función generatriz de la transformación canónica $F_1(q, Q)$:

$$F_1(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cotg Q,$$

a partir de proponer:

$$q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin(Q),$$
$$p = f(P) \cos(Q),$$

donde Q y P son la nueva coordenada y momento, respectivamente, y $f(P)$ una cantidad a determinar.

- (b) Utilizar la función generatriz $F_1(q, Q)$ para hallar las expresiones de $q(Q, P)$ y $p(Q, P)$.

- (c) Calcular el nuevo Hamiltoniano $K(Q, P)$. ¿Qué particularidad tiene?
- (d) Integrar la ecuación de movimiento de Q y volver a la variable original para obtener la solución conocida:

$$q(t) = \sqrt{2h/m\omega^2} \sin(\omega t + \alpha),$$

donde h es la energía del oscilador y α una constante.

3. Resolver el problema del oscilador armónico con el método de Hamilton-Jacobi.
4. Variables ángulo-acción:
 - (a) Calcular la acción del oscilador armónico y obtener su Hamiltoniano en variables ángulo-acción.
 - (b) Utilizar las variables ángulo-acción para obtener la frecuencia del oscilador armónico.