Dinámica No Lineal

Práctica 2

El péndulo

2022

Hamiltoniano del péndulo

1. (a) Hallar el Hamitoniano de un péndulo simple:

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2} - \omega_0^2 \cos q, \qquad p \in \mathbb{R},\ q \in [-\pi, \pi],$$

   con ω_0 la frecuencia (constante) de pequeñas oscilaciones. Asumir $m = 1$.

   (b) Identificar los regímenes de movimiento para los distintos valores de la energía h del péndulo.

   (c) Escribir las ecuaciones de Hamilton correspondientes.

2. (a) Encontrar los puntos fijos del péndulo y estudiar su estabilidad lineal.

   (b) Hallar el alejamiento y acercamiento respecto al punto fijo inestable para un tiempo finito T.

3. (a) Hallar la expresión de la separatriz en función del tiempo.

   (b) Estudiar el comportamiento asintótico de la separatriz para $t \to \pm\infty$.

   (c) Mostrar que la velocidad sobre la separatriz tiende a 0 cuando el movimiento se aproxima al punto fijo inestable.

4. (a) Graficar esquemáticamente el espacio de fases del péndulo a partir de los resultados anteriores

   (b) Graficar el espacio de fases del péndulo mediante la integración numérica de las ecuaciones de movimiento para varios valores de $H(p,q) = h$. Considerar $\omega_0 = 1, h < \omega_0^2, h = \omega_0^2$ y $h > \omega_0^2$. Comparar con lo anterior.
   Sugerencia: utilizar como referencia el programa en Python `Pendulo.py` o el programa en FORTRAN `pen.f`.

Frecuencia del pendulo

La frecuencia del péndulo en función de la energía es:

$$\omega(h) = \frac{\pi\omega_0}{2K(k)}, \qquad \omega(h) = \frac{\pi\omega_r(h)}{2K(k)},$$

para oscilaciones ($h < \omega_0^2$) y rotaciones ($h > \omega_0^2$) respectivamente, donde

$$\omega_r(h) = \sqrt{\frac{h + \omega_0^2}{2}}$$

$K(k)$ es la integral elíptica completa de primera especie, dada por:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}},$$

con $k = \sqrt{(h + \omega_0^2)/2\omega_0^2}$ para oscilaciones y $k = \sqrt{2\omega_0^2/(h + \omega_0^2)}$ para rotaciones.

5. (a) Calcular numéricamente $\omega(h)$ y graficar para distintos valores de h, con $\omega_0 = 1$.

   (b) Repetir el cálculo anterior para $h \in (0.9, 1.01)$.

   (c) Comparar con la frecuencia obtenida a partir de la expresión asintótica en la vecindad de la separatriz:

   $$\omega(w) = \frac{\pi\omega_0}{\ln \frac{32}{|w|}}, \qquad w = \frac{h - \omega_0^2}{\omega_0^2}, \qquad |w| \ll 1.$$

   Sugerencia: utilizar como referencia el programa `Frecuencia.py` o en FORTRAN `freqpen.f`.

6. *Opcional:* Hallar la frecuencia del péndulo a primer orden para bajas energías $h \ll \omega_0^2$ y comparar con la frecuencia del oscilador armónico.