

DINAMICA NO LINEAL

Lineamientos para la práctica 4

1 Dinámica No Lineal

1.1 Trabajos Prácticos: Resonancias

Resonancias en sistemas 1D + perturbacion externa: resonancia parametrica y baja no linealidad.
Sea el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2(\tau)\varphi^2) - \frac{1}{24}\varphi^4$$

donde $\omega^2(\tau) = 1 + \epsilon \cos \tau$; con $\tau = \Omega t + \tau_0 \pmod{2\pi}$, con $\epsilon \ll 1$, $\varphi \ll 1$ (oscilaciones pequenas) y $\Omega \approx \mathcal{O}(1) > 0$.

a): En el enunciado de la práctica se dan los lineamientos correspondientes.

b): Intente eliminar la perturbación a orden ϵ mediante una transformacion canonica, para llevarla a orden ϵ^2 . Es posible realizarla? Porque?

El hamiltoniano promediado es

$$\langle H \rangle = I - \frac{I^2}{16} + \frac{1}{4}\epsilon I \cos(2\theta - \tau)$$

y llamemos

$$\begin{aligned} H_0(I) &= I - \frac{I^2}{16}, \\ \epsilon V(I, \theta, t) &= \epsilon V(I) \cos(2\theta - \tau), \\ V(I) &= \frac{I}{4}. \end{aligned}$$

Con estas expresiones podemos intentar una transformación canónica para llevar la perturbación a orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ utilizando una TC próxima a la identidad

$$\begin{aligned}
F(I_1, \theta) &= I_1 \theta + \epsilon \Phi(I_1) \sin(2\theta - \tau), \\
I &= \frac{\partial F}{\partial \theta} = I_1 + 2\epsilon \Phi(I_1) \cos(2\theta - \tau), \\
\theta_1 &= \frac{\partial F}{\partial I_1} = \theta + \epsilon \frac{d\Phi}{dI_1}(I_1) \sin(2\theta - \tau), \\
\bar{H} &= \langle H \rangle + \frac{\partial F}{\partial t},
\end{aligned}$$

donde $\Phi(I_1)$ es una función a determinar de manera que efectivamente esta transformación elimine todos los términos a $\mathcal{O}(\epsilon)$ en el Hamiltoniano. Escribir el hamiltoniano en términos de I_1 reteniendo términos hasta $\mathcal{O}(\epsilon)$, por ejemplo:

$$H_0(I_1 + 2\epsilon \Phi(I_1) \cos(2\theta - \tau)) = H_0(I_1) + \underbrace{\frac{dH_0}{dI}(I_1)}_{\omega_0(I_1)} 2\epsilon \Phi(I_1) \cos(2\theta - \tau) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Proceder de la misma manera con el resto de los términos y elegir $\Phi(I_1)$ de manera que se eliminen los términos a $\mathcal{O}(\epsilon)$. Analizar el denominador que aparece en $\Phi(I_1)$.

c): En el enunciado de la práctica se dan los lineamientos correspondientes.

d): Encontrar los puntos fijos de H_r suponiendo que $\epsilon > 0$ y $\Delta < \epsilon/2$.
Los puntos fijos del hamiltoniano son aquellos que satisfacen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_r}{\partial \psi} &= 0 \\
\frac{\partial H_r}{\partial J} &= 0,
\end{aligned}$$

lo cual para el caso del hamiltoniano H_r resultan

$$\begin{aligned}
-J \frac{\epsilon}{2} \sin \psi &= 0 \\
\Delta - \frac{J}{2} + \frac{\epsilon}{2} \cos \psi &= 0
\end{aligned}$$

De la primera de estas ecuaciones tenemos que $J = 0$ o $\psi = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Tomando $J = 0$ tenemos

$$\Delta + \frac{\epsilon}{2} \cos \psi = 0$$

lo cual implica que la fase ψ^* asociada al punto fijo con $J = 0$ es

$$\cos \psi^* = \left(-\frac{2\Delta}{\epsilon} \right),$$

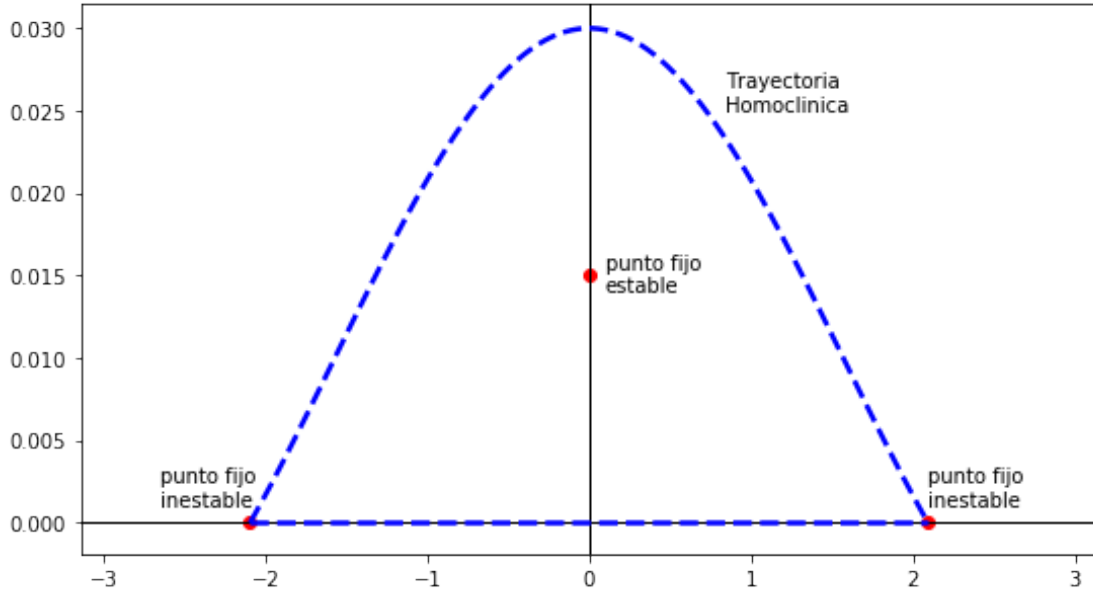
siendo $\Delta < \epsilon/2$, existen soluciones reales para el ángulo. Por tanto los puntos $P_{\pm 1} = (0, \pm\psi^*)$ son dos puntos fijos del hamiltoniano.

Para $\psi = n\pi$ resulta

$$J = 2\Delta + (-1)^n \epsilon$$

y los puntos fijos son $P_n = (2\Delta + (-1)^n \epsilon, n\pi)$. En el intervalo $[0, 2\pi)$ sólo existirán dos valores posibles, $0 \equiv 2\pi$ y π . Para $\psi = \pi$ resulta $J = 2\Delta - 1$. Como $2\Delta < \epsilon \ll 1$, ocurre que $J < 0$, lo que implica $I < 0$, solución que debe descartarse si trabajamos en el plano real. Por qué?

e,f): En la Sección 2.1.4 de las Notas de Teoría se brindan los lineamientos para estudiar la estabilidad de los puntos fijos. Recordar que la trayectoria homoclínica conecta los puntos de equilibrio inestables, por lo que su energía será la misma que la de estos puntos. La misma resutla



Derivar la expresión de esta trayectoria.

g): En la Sección 3.3 de las Notas de Teoría se brindan los lineamientos correspondientes.