

DINAMICA NO LINEAL

Lineamientos para la práctica 6

1 Dinámica No Lineal

1.1 Trabajos Prácticos: Mapa Standard

Ejercicio 1-2:

1. a) Mostrar que el Mapa Standard, $(\bar{I}, \bar{\theta}) = T(I, \theta)$, con $I \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{S}^1$ y definido por

$$\begin{aligned}\bar{I} &= I + K \sin \theta, \\ \bar{\theta} &= \theta + \bar{I} = \theta + I + K \sin \theta,\end{aligned}$$

es canónico.

- b) Mostrar que posee las siguientes simetrías:

$$T(I, \theta + 2m\pi) = T(I, \theta), \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$T(I + 2n\pi, \theta) = T(I, \theta), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$T(-I, -\theta) = T(I, \theta).$$

En base a estas simetrías, justificar que el MS puede restringirse al espacio $\mathcal{S} = \{(I, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq I \leq \pi\}$.

- c) Encontrar los puntos fijos de período 1.

2. A partir del Hamiltoniano asociado al MS,

$$H(J, \theta, t) = \frac{J^2}{2} + k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - nt),$$

donde $J = I/2\pi \in \mathbb{R}$, $\theta, t \in \mathbb{S}^1$ y $k = K/4\pi^2$;

- a) Encontrar las resonancias a orden K y determinar sus amplitudes.
- b) A partir del criterio de *overlap* para estas resonancias, estimar un valor crítico para K , K_c , tal que para $K > K_c$ el movimiento es mayoritariamente inestable, caótico.
- c) Haciendo una transformación canónica para eliminar los términos de orden k en el Hamiltoniano y considerando condiciones iniciales “lejos” de las resonancias enteras, $J^r = n$, encontrar las resonancias a orden k^2 .

Sugerencia: utilice una transformación canónica: $(J, \theta) \rightarrow (J_1, \theta_1)$, definida por una función generatriz de la forma:

$$F(J_1, \theta) = J_1 \theta + k \phi(J_1, \theta),$$

donde ϕ es una función a determinar de manera tal que permita eliminar los términos de orden k .

d) Graficar esquemáticamente en el plano (J, θ) las resonancias que aparecen a orden K y K^2 . Que puede decir del resultado obtenido en el apartado b)?

Resolución Ejercicio 1-2: Para resolver estos dos ejercicios, se sugiere remitirse al Capítulo 8 de las Notas de Teoría.

Ejercicio 3-4:

1. Estudiar numéricamente el MS reducido:

$$\bar{y} = y + \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x, \quad \bar{x} = x + \bar{y}, \quad x, y \bmod 1,$$

para $0 < K \leq 5$ y tomando 200 condiciones iniciales a lo largo del eje y ($x = 0$), con $0 \leq y < 1$. Graficar en el plano (x, y) para $N = 10^6$ iterados en cada caso y analizar los diferentes resultados en base al criterio de *overlap*. Discutir los resultados alrededor de $K = 1$ y $K = 4$.

2. Repetir el ejercicio anterior pero tomando condiciones iniciales a lo largo del eje $x = 0.5$.
3. Considerar $K = 10$, una única condición inicial $(x_0, y_0) \approx (10^{-4}, 10^{-4})$ y $N_0 \approx 10^7$ iterados. Discutir el resultado obtenido comparando con lo que se obtiene iterando n condiciones iniciales a lo largo del eje y para el mismo valor de x_0 cuando el número de iterados, N , satisface $Nn \approx N_0$.

Resolución Ejercicio 3-4: Se sugiere descargar el programa `smb.f` y su correspondiente archivo de datos `smb.dat` y procurar utilizarlo como guía para estos ejercicios.